ANALYSIS

Regel von de L'Hospital

Text Nr. 41153

Stand 13. März 2018

FRIEDRICH W. BUCKEL

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Beispiele

Bei der Berechnung von Grenzwerten kann es zu Situationen kommen, die einem Rätsel aufgeben.

Beispiel 1

Der Grenzwert $\lim\limits_{|x|\to\infty} \frac{2x^2-4}{x^2+9}$ soll berechnet werden. Ein Schüler wendet den Grenzwertsatz so an:

$$\lim_{|x|\to\infty} \frac{2x^2-4}{x^2+9} = \frac{\lim\limits_{|x|\to\infty}\left(2x^2-4\right)}{\lim\limits_{|x|\to\infty}\left(x^2+9\right)} = \frac{\infty}{\infty}$$ und ist dann am Ende seiner Weisheit.

<u>1. Lösungsweg</u>:

Das Problem „Unendlich durch Unendlich“ kann man durch Kürzen beseitigen.

Man kürzt durch die höchste x-Potenz des Nenners.

$$\lim_{|x|\to\infty} \frac{2x^2-4}{x^2+9} = \lim_{|x|\to\infty} \frac{2-\frac{4}{x^2}}{1+\frac{9}{x^2}} = \frac{\lim\limits_{|x|\to\infty}\left(2-\frac{4}{x^2}\right)}{\lim\limits_{|x|\to\infty}\left(1+\frac{9}{x^2}\right)} = \frac{2}{1} = 2$$

denn $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{4}{x^2} = 0$ und $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{9}{x^2} = 0$

Jetzt hat der Grenzwertsatz den Grenzwert 2 ergeben.

<u>2. Lösungsweg.</u>

Der französische Mathematiker de L'Hospital (gesprochen: „de Lopidall“) hat folgendes herausgefunden:

Eine Bruchfunktion hat denselben Grenzwert wie eine andere Bruchfunktion, die dadurch entsteht, daß man Zähler und Nenner <u>getrennt</u> für sich ableitet. (Achtung: Also nicht die Quotientenregel verwenden!)

$$\lim_{|x|\to\infty} \frac{2x^2-4}{x^2+9} = \lim_{|x|\to\infty} \frac{4x}{2x} = 2$$

<u>Regel von de L'Hospital</u>

Eine Funktion $h(x) = \frac{Z(x)}{N(x)}$ hat für $x \to \pm\infty$ (oder für $x \to 0$) denselben Grenzwert,

wie die Funktion h*, die dadurch aus h entsteht, dass man Zähler und Nenner getrennt ableitet.

$$\lim_{x\to\pm\infty} h(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{Z(x)}{N(x)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{Z'(x)}{N'(x)}$$

falls der letzte Grenzwert existiert.

Beispiel 2

Diese Methode bewährt sich vor allem bei Exponentialfunktionen, die den ersten Weg des Kürzens nicht zulassen:

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} x\cdot e^{-x} = ?}$$

Der Versuch, den Grenzwertsatz auf das Produkt anzuwenden scheitert so:

$$\lim_{x\to\infty} x\cdot e^{-x} = \underbrace{\lim_{x\to\infty} x}_{\infty}\cdot\underbrace{\lim_{x\to\infty} e^{-x}}_{0}$$

Wir werden auf das Produkt $"0\cdot\infty"$ geführt, das genauso wie $"\frac{\infty}{\infty}"$ keinen eindeutigen Wert hat.

Daher verwendet man die Regel von de L'Hospital:

1. Schritt: Man verwandelt das Produkt $x\cdot e^{-x}$ in einen Bruch:

$$f(x) = x\cdot e^{-x} = \frac{x}{e^x}$$

2. Schritt:

Dieser Bruch hat für $x\to\infty$ denselben Grenzwert wie die neue Funktion, die dadurch entsteht, daß man den Zähler des Bruches und den Nenner jeweils für sich ableitet (also **nicht** die Quotientenregel anwenden!)

In einen Bruch verwandeln

De L'Hospital

Zurück verwandeln

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} x\cdot e^{-x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^x} = \lim_{x\to\infty} e^{-x} = 0$$

Also ist y = 0 die waagrechte Asymptote der Kurve $y = x\cdot e^{-x}$ für $x\to\infty$.

Beispiel 12 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1 - x}{\sin^2(x)}$

$$\overset{\text{Hosp}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{2\cdot\sin(x)\cdot\cos(x)} \overset{\text{Hosp}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{2\cdot\cos^2(x) - 2\cdot\sin^2(x)} = \frac{1}{2\cdot 1 - 2\cdot 0} = \frac{1}{2}$$

Beispiel 13 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sinh(x) - x}{\cosh(x) - 1} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cosh(x) - 1}{\sinh(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \dfrac{\sinh(0)}{\cosh(0)} = \dfrac{0}{1} = 0$

Die Regel von de L'Hospital wurde zweimal nacheinander angewandt.

Beispiel 16 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 + 2\cdot\cos(x) - 2}{x - \sin(x)}$

$$\overset{\text{Hosp}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2x - 2\cdot\sin(x)}{1 - \cos(x)} \overset{\text{Hosp}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2 - 2\cdot\cos(x)}{\sin(x)} \overset{\text{Hosp}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2\cdot\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{2\cdot 0}{1} = 0$$

Hier wurde die Regel von de L'Hospital dreimal nacheinander angewandt:

Beispiel 19 $\lim\limits_{x\to 0} \left(1 + \arctan(x)\right)^{1/x}$

Trick anwenden: $z = a^b \Leftrightarrow \ln(z) = b\cdot\ln(a) \Leftrightarrow z = e^{b\cdot\ln(a)}$

Hier so: $z = \left(1 + \arctan(x)\right)^{1/x} \Leftrightarrow \ln z = \frac{1}{x}\cdot\ln\left(1 + \arctan(x)\right) \Leftrightarrow z = e^{\frac{1}{x}\cdot\ln\left(1+\arctan(x)\right)}$

$\lim\limits_{x\to 0} z = \lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}\cdot\ln\left(1+\arctan(x)\right)}$ Nebenrechnung: Für den Exponenten gilt:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\cdot\ln\left(1 + \arctan(x)\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln\left(1 + \arctan(x)\right)}{x} \overset{\text{Hosp}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1 + \arctan(x)}\cdot\frac{1}{x^2 + 1}}{1} = 1$$

wegen arctan(0) = 0. Also gilt für den gesuchten Grenzwert $\lim\limits_{x\to 0} \left(1 + \arctan(x)\right)^{1/x} = e^1 = e$